Abiturvorbereitung - Blatt 4

Analysis

Grundlagentraining

1. Bestimme die Gleichung der Wendetangente an den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$.

2. Bestimme jeweils die Definitionsmenge:

   (a) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

   (b) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

   (c) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-3}$

   (d) $f(t) = e^{-\sqrt{t}}$

3. Untersuche die Graphen der folgenden Funktionen auf Symmetrie:

   (a) $f(x) = e^{x^2+2}$

   (b) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

   (c) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 8$

   (d) $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$

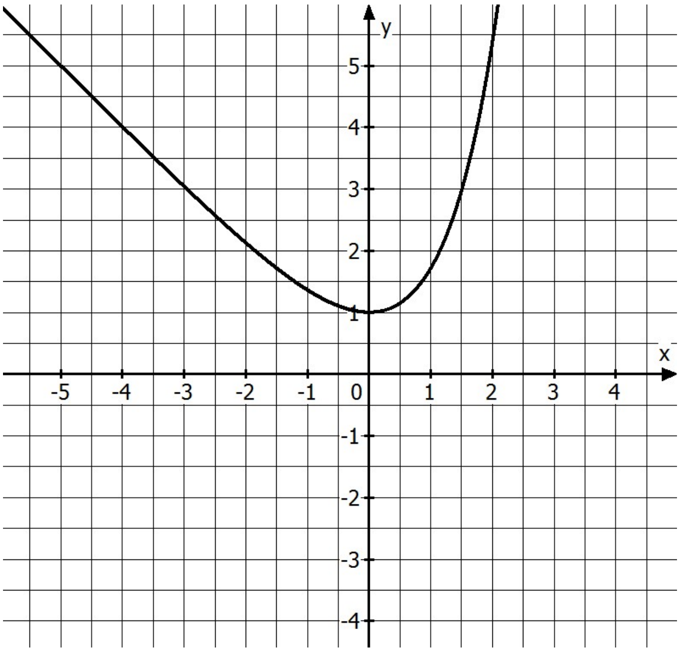
4. Berechne:

   (a) $\int\limits_{-1}^{1} \sin(x) dx$

   (b) $\int\limits_{a}^{3} ax^2 dx$

   (c) $\int\limits_{0}^{b} e^{-x} dx$

5. Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.



   (a) Skizziere die Graphen von
      i. $g(x) = f(x) - 2$
      ii. $h(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x)$
      iii. $k(x) = -f(x)$
      iv. $j(x) = f(-x)$

   (b) Skizziere die Graphen von $f'(x)$ und $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$.

Originalaufgaben

1. *(2011 - Grundkurs Analysis I)*
   Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto (e^x - 2)^2$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

   (a) Geben Sie die Nullstelle von f an und untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$.

   (b) Ermitteln Sie Art und Lage des Extrempunkts, das Krümmungsverhalten und die Lage des Wendepunkts von G_f.

Stochastik

Grundlagentraining

1. Erfahrungsgemäß sind 4% einer Bevölkerungsgruppe farbenblind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 200 zufällig aus dieser Gruppe ausgewählten Personen

   (a) genau sieben

   (b) mehr als sieben

   (c) höchstens sieben

   farbenblinde Personen?

2. Eine Fluggesellschaft verkauft für einen Flug 200 Tickets, die Maschine besitzt aber nur 195 Plätze. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person ihren Flug nicht antritt (Krankheit, Todesfall in der Familie, Anschlussflug verpasst, etc.) beträgt erfahrungsgemäß 5%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen die 195 Plätze trotzdem nicht aus?

3. Auf wieviele Arten kann man die sieben Zwerge nebeneinander anordnen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufällig gebildeten Anordnung der Zwerg Grumpy ganz links und der Zwerg Sleepy ganz rechts stehen?

Originalaufgaben

1. *(2009 - Grundkurs Stochastik IV)*
   Es wird angezweifelt, dass der Anteil der Befürworter des Rauchverbots derzeit noch 67% beträgt. Vielmehr wird vermutet, dass der Prozentsatz gegenwärtig höchstens bei 60% liegt. Um diese Vermutung zu testen, wird eine Befragung von 100 zufällig ausgewählten Personen durchgeführt.
   Wie muss die Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich lauten, wenn die Vermutung mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5% irrtümlich abgelehnt werden soll?

Analytische Geometrie

Grundlagentraining

1. Die beiden Geraden g und h schneiden sich im Punkt $S(2|-1|3)$. Gib mögliche Geradengleichungen für g und h an.

2. Gib zwei mögliche Kugelgleichungen von Kugeln an, die sich berühren.

3. Gegeben ist die Gerade $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Bestimme die Koordinaten der beiden Punkte auf g, die vom Punkt $A(8|1|7)$ 3 Längeneinheiten entfernt sind.

Originalaufgaben

1. *(2011 - Beispielabitur Geometrie I)*
   In einem kartesischen Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet. Die x_1-Achse zeigt in Richtung Osten, die x_2-Achse in Richtung Norden, die Längeneinheit ist 1 km.
   Ein Flugzeug F_1 steigt unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn im Punkt $P(-10|0|0)$ längs der Geraden $g_1 : \vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, auf.
   Flugzeug F_2 fliegt entlang der Geraden $g_2 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

   (a) Geben Sie die Himmelsrichtung an, in der F_1 fliegt und begründen Sie, dass F_2 eine konstante Flughöhe hält.

   (b) Berechnen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn von F_1 gegen die Horizontale.

   (c) F_1 überfliegt in einer Höhe von 6 km eine Radarstation im Punkt Z der x_1x_2-Ebene. Bestimmen Sie die Koordinaten von Z.
   (Ergebnis: $Z(20|30|0)$)

   (d) Der Richtungsvektor von g_2 beschreibt die konstante Geschwindigkeit des Flugzeugs F_2 in der Einheit $\frac{\text{km}}{\text{min}}$. Geben Sie die physikalische Bedeutung des Parameters μ an.

   (e) Das Radar in Z erfasst alle Objekte im Luftraum bis zu einer Entfernung von 50 km. Berechnen Sie die Länge der Flugstrecke von F_2 im Überwachungsbereich des Radars.